

**ТЕРМОУПРУГОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНОЙ
ТРУБЫ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ ПО ТОЛЩИНЕ С УЧЕТОМ
ИДЕАЛЬНОГО КОНТАКТА МЕЖДУ СЛОЯМИ**

С. М. Верещака, д-р техн. наук, профессор;
А. В. Дейнека*, аспирант;
Ю. В. Мороз, студент; **А.В. Шулумей**, студент,
 Сумский государственный университет,
 ул. Р.-Корсакова 2, г. Сумы, Украина
 *E-mail; a_dejneka@mail.ru

На основе классической теории упругости анизотропного тела исследуется напряженно-деформированное состояние многослойного полого цилиндра конечной длины при действии внутреннего давления и теплового воздействия. Кинематические и статические условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев считаются идеальными. Решение задачи получено в осесимметричной постановке. При этом заданные величины внутреннего давления и температуры изменяются по синусоидальному закону по длине цилиндра. Отмечается, что увеличение температуры на наружной поверхности композитной трубы, оказывает существенное влияние на ее напряженное состояние.

Ключевые слова: полый цилиндр, температурные напряжения, стеклопластик.

ВВЕДЕНИЕ

Композиты многослойной структуры широко используются в различных областях современной техники. Известно, что элементы из композитов значительно выигрывают по удельной прочности при сравнении с их изотропными аналогами. Так, например, замена стальных труб стеклопластиковыми трубами увеличивает срок службы трубопроводов примерно в 4 раза и в 3 раза снижает его массу, а также исключает применение антикоррозионных защитных средств и дорогостоящих сварочных работ.

Однако для практической реализации этих преимуществ необходимо и дальше накапливать опыт проектирования такого рода конструкций. При изготовлении и эксплуатации многослойных конструкций из композиционных материалов на межслойных границах контакта жестких армированных слоев происходит образование тонкого мягкого клеевого слоя, а также различного рода структурных несовершенств, например, участков непрочной или отслоений. Традиционно используемое в расчетных моделях предположение о непрерывности перемещений и напряжений при переходе через границу контакта жестких армированных слоев оказывается существенно нарушенным.

В этой связи изучение напряженного состояния армированных оболочек при действии как статической, так и тепловой нагрузки на основе дискретно-структурной теории многослойных оболочек, когда учитываются реальные условия взаимодействия слоев и величина изменения контактных напряжений на межслойных границах, представляется актуальной задачей. Подробный анализ последних результатов и направлений развития дискретно-структурной теории слоистых пластин и оболочек можно найти в обзорах работ [1 – 2].

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть круговой полый цилиндр нагружен по цилиндрическим поверхностям $r = r_a$ и $r = r_b$ стационарными температурными нагрузками

$t_a(z)$ и $t_b(z)$ и равномерно распределенными по окружной координате усилиями $q_a(z)$ и $q_b(z)$. Направление осей цилиндрической системы координат указано на рисунке 1, а. Напряжения, которые возникают в точке цилиндра при действии внешней нагрузки, показаны на рисунке 1, б. Считается, что температурная нагрузка и заданное по лицевым цилиндрическим поверхностям давление осесимметричны относительно продольной оси цилиндра. Но при этом их величина изменяется вдоль меридиана и зависит от координаты z . Кроме этого, цилиндр имеет конечную длину l , а на его торцах выполняются условия свободного опирания. Также при решении задачи может учитываться эффект проскальзывания слоев цилиндра друг относительно друга в продольном направлении.

На основе классической теории анизотропного упругого тела [3] для решения поставленной задачи были составлены уравнения равновесия, физические и геометрические соотношения.

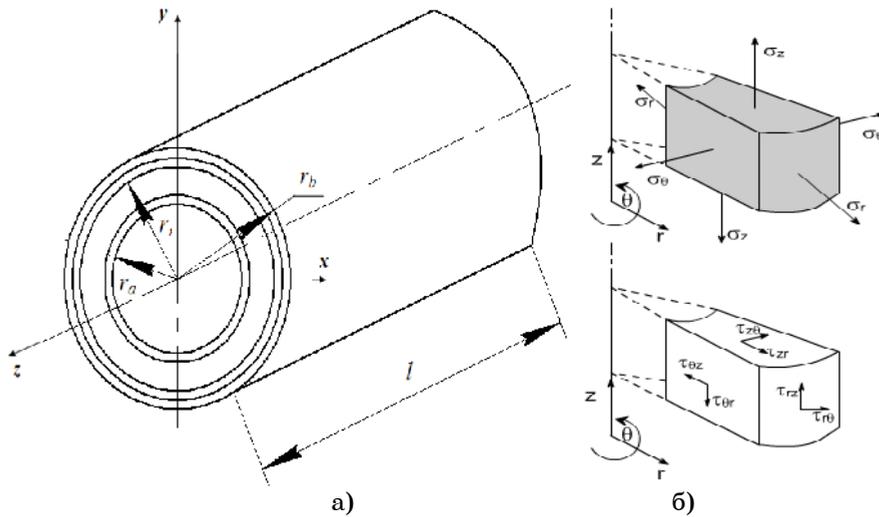


Рисунок 1 – Многослойный круговой полый цилиндр конечной длины

1.1. Физические соотношения.

Приняв цилиндрическую систему координат r, θ, z и задав направление оси x , от которой отсчитывается угол θ (рисунок 1, а), физические соотношения для i -го ортотропного слоя с цилиндрической анизотропией запишутся в виде

$$\{\varepsilon_r^i\} = [B_r^i] \{\sigma_r^i\} + \{\alpha_r^i \Delta t\} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

где

$$\{\sigma_r^i\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r^i \\ \sigma_\theta^i \\ \sigma_z^i \\ \tau_{\theta z}^i \\ \tau_{rz}^i \\ \tau_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_r^i\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^i \\ \varepsilon_\theta^i \\ \varepsilon_z^i \\ \gamma_{\theta z}^i \\ \gamma_{rz}^i \\ \gamma_{r\theta}^i \end{Bmatrix}, \quad \{\alpha_r^i \Delta t\} = \begin{Bmatrix} \alpha_r^i \Delta t \\ \alpha_\theta^i \Delta t \\ \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$[B_r^i] = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & b_{22}^i & b_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & b_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & b_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & b_{55}^i & 0 \\ & & & & & b_{66}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta r}^i}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{zr}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{r\theta}^i}{E_r^i} & \frac{1}{E_\theta^i} & -\frac{\nu_{z\theta}^i}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{rz}^i}{E_r^i} & -\frac{\nu_{\theta z}^i}{E_\theta^i} & \frac{1}{E_z^i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta z}^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rz}^i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}^i} \end{bmatrix}$$

матрицы-столбцы напряженно-деформированного состояния и температурных деформаций, а также матрица коэффициентов податливости $[B_r^i]$ соответственно. Здесь E_r^i, E_θ^i, E_z^i – модули упругости соответственно в радиальном, круговом и продольном направлениях; $G_{\theta z}^i, G_{rz}^i, G_{r\theta}^i$ – модули сдвига в плоскостях $\theta z, r\theta z, r\theta$ соответственно; ν_{kj}^i ($k, j = r, \theta, z$) – коэффициенты Пуассона; α_j^i ($j = r, \theta, z$) – температурный коэффициент линейного расширения в направлениях осей цилиндрической системы; Δt – изменение температуры на лицевых поверхностях цилиндра; N – количество слоев цилиндра. Решая систему уравнений (1) относительно напряжений, несложно найти следующие физические соотношения

$$\{\sigma_r^i\} = [A_r^i] \{\varepsilon_r^i\} - \{\alpha_r^i \Delta t\}, \quad (2)$$

где

$$[A_r^i] = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22}^i & a_{23}^i & 0 & 0 & 0 \\ & & a_{33}^i & 0 & 0 & 0 \\ & \text{сим.} & & a_{44}^i & 0 & 0 \\ & & & & a_{55}^i & 0 \\ & & & & & a_{66}^i \end{bmatrix},$$

$$\{\alpha_r^i \Delta t\} = \begin{bmatrix} (a_{11}^i + a_{12}^i + a_{13}^i) \alpha_r^i \Delta t \\ (a_{12}^i + a_{22}^i + a_{23}^i) \alpha_\theta^i \Delta t \\ (a_{13}^i + a_{23}^i + a_{33}^i) \alpha_z^i \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь коэффициенты матрицы жесткости $[A_r^i]$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_{11}^i &= \left[b_{22}^i b_{33}^i - (b_{23}^i)^2 \right] \Delta^{-1}, & a_{22}^i &= \left[b_{11}^i b_{33}^i - (b_{13}^i)^2 \right] \Delta^{-1}, \\ a_{33}^i &= \left[b_{11}^i b_{22}^i - (b_{12}^i)^2 \right] \Delta^{-1}, & a_{12}^i &= \left[b_{13}^i b_{23}^i - b_{12}^i b_{33}^i \right] \Delta^{-1}, \\ a_{13}^i &= \left[b_{12}^i b_{23}^i - b_{22}^i b_{13}^i \right] \Delta^{-1}, & a_{23}^i &= \left[b_{12}^i b_{13}^i - b_{11}^i b_{23}^i \right] \Delta^{-1}, \\ \Delta &= b_{11}^i b_{22}^i b_{33}^i + b_{12}^i b_{23}^i b_{31}^i + b_{21}^i b_{32}^i b_{13}^i - \\ & b_{13}^i b_{22}^i b_{31}^i - b_{21}^i b_{12}^i b_{33}^i - b_{11}^i b_{32}^i b_{23}^i, \\ a_{44}^i &= \frac{1}{b_{44}^i}, & a_{55}^i &= \frac{1}{b_{55}^i}, & a_{66}^i &= \frac{1}{\sigma_{66}^i}. \end{aligned}$$

1.2 Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r^i} &= \frac{\partial u_{r^i}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta^i} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta^i}}{\partial \theta} + \frac{u_{r^i}}{r}, \quad \varepsilon_{z^i} = \frac{\partial u_{z^i}}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z^i} = \frac{\partial u_{\theta^i}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{z^i}}{\partial \theta}, \\ \gamma_{rz^i} &= \frac{\partial u_{z^i}}{\partial r} + \frac{\partial u_{r^i}}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta^i} = \frac{\partial u_{r^i}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta^i}}{\partial r} - \frac{u_{\theta^i}}{r} \quad (i = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_{r^i} , u_{θ^i} , u_{z^i} – перемещения в радиальном, окружном и продольном направлении i -го ортотропного слоя цилиндра ($r_{i-1} < r < r_{i+1}$) соответственно.

В связи с тем, что рассматриваемая задача в осесимметричной постановке относительно оси z , перемещение u_{θ^i} не изменяется в окружном направлении. Поэтому выражения (3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r^i} &= \frac{\partial u_{r^i}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta^i} = \frac{u_{r^i}}{r}, \quad \varepsilon_{z^i} = \frac{\partial u_{z^i}}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z^i} = 0, \quad \gamma_{rz^i} = \frac{\partial u_{z^i}}{\partial r} + \frac{\partial u_{r^i}}{\partial z}, \quad \gamma_{r\theta^i} = -\frac{u_{\theta^i}}{r} \\ & (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (4)$$

1.3 Уравнения равновесия

При осесимметричной двумерной постановке задачи уравнения равновесия классической анизотропной теории упругости [3] принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{r^i}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz^i}}{\partial z} + \frac{\tau_{r^i} - \tau_{rz^i}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz^i}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^i}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r^i}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система из двух уравнений равновесия дополняется третьим уравнением теплопроводности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) t^i = 0. \quad (6)$$

Для решения поставленной задачи систему, составленную из трех дифференциальных уравнений в частных производных (5) – (6), необходимо задать граничные условия на торцах и лицевых поверхностях цилиндра, а также условия контакта по сопряженным поверхностям соседних слоев.

1.4. Граничные условия:

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned} u_r^i(r, 0) = 0, \sigma_z^i(r, 0) = \tau_{rz}^i(r, 0) = 0 \\ u_r^i(r, l) = 0, \sigma_z^i(r, l) = \tau_{rz}^i(r, l) = 0, \\ \sigma_r^1(r_a, z) = q_a(z), \tau_{rz}^1(r_a, z) = 0, \\ \sigma_r^N(r_b, z) = q_b(z), \tau_{rz}^N(r_b, z) = 0, \\ t^i(r, 0) = t^i(r, l) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ t^1(r_a, z) = t_a(z), t^N(r_b, z) = t_b(z). \end{aligned} \quad (7)$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned} \sigma_r^{i-1}(r_i, z) = \sigma_r^i(r_i, z), \tau_{rz}^{i-1}(r_i, z) = \tau_{rz}^i(r_i, z) \\ u_r^{i-1}(r_i, z) = u_r^i(r_i, z), u_z^{i-1}(r_i, z) - u_z^i(r_i, z) = K \cdot \tau_{rz}^i(r_i, z) \\ t^{i-1}(r_i, z) = t^i(r_i, z), \lambda^{i-1} \frac{\partial t^{i-1}(r_i, z)}{\partial r} = \lambda^i \frac{\partial t^i(r_i, z)}{\partial r} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (8)$$

В последнем условии (8) параметр i соответствует коэффициенту теплопроводности i -го слоя.

В качестве предельных из уравнения (8) имеет место два варианта: при $1/K^{(i)} = 0$ – имеет место упругое проскальзывание соседних слоев друг относительно друга по сопряженным поверхностям, при $K^{(i)} = 0$ – идеальный контакт.

1.5 Безразмерные параметры

Для упрощения ввода исходных данных и обобщения полученных численных результатов, следуя работе [4], вводятся следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} R = \frac{r}{r_b}, R_a = \frac{r_a}{r_b}, R_b = \frac{r_b}{r_b} = 1, Z = \frac{z}{r_b}, \\ L = \frac{l}{r_b}, A_{kl}^i = \frac{a_{kl}^i}{E_0}, \Gamma_k^i = \frac{\gamma_k^i}{\alpha_0 E_0}, \\ T^i = \frac{t^i}{t_0}, \Lambda^i = \frac{\lambda^i}{\lambda_0}, U_r^i = \frac{u_r^i}{\alpha_0 E_0 r_b}, U_z^i = \frac{u_z^i}{\alpha_0 E_0 r_b}, \\ S_r^i = \frac{\sigma_r^i}{\alpha_0 E_0 t_0}, S_z^i = \frac{\sigma_z^i}{\alpha_0 E_0 t_0}, S_\theta^i = \frac{\sigma_\theta^i}{\alpha_0 E_0 t_0}, \\ TU_{rz}^i = \frac{\tau_{rz}^i}{\alpha_0 E_0 t_0}, Q_a(z) = \frac{q_a(z)}{\alpha_0 E_0 t_0}, Q_b(z) = \frac{q_b(z)}{\alpha_0 E_0 t_0}, \\ T_a(z) = \frac{t_a(z)}{t_0}, T_b(z) = \frac{t_b(z)}{t_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

где E_0 , ν_0 , и α_0 – значения модуля Юнга, теплопроводности и коэффициента теплового линейного расширения эталонного материала; t_0 – эталонная температура цилиндра.

1.6 Постановка краевой задачи

Подставляя геометрические соотношения (4) в уравнения (5), а также с учетом безразмерных параметров введенных выше, можно получить

$$\begin{aligned} & \left[A_{11}^i \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_r^i + \\ & \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial R}, \\ & \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \frac{\partial^2}{\partial R \partial Z} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial Z} \right] U_r^i + \\ & \left[A_{55}^i \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + A_{33}^i \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right] U_z^i = \Gamma_r^i \frac{\partial T^i}{\partial Z}, \\ & \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) T^i + \frac{\partial^2 T^i}{\partial Z^2} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия (7), (8), записанные при помощи безразмерных параметров (9), принимают вид:

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned} U_r^i(R, 0) = 0, S_z^i(R, 0) = TU_{rz}^i(R, 0) = 0 \\ U_r^i(R, l) = 0, S_z^i(R, l) = TU_{rz}^i(R, l) = 0, \\ S_r^1(R_a, z) = Q_a(z), TU_{rz}^1(R_a, z) = 0, \\ S_r^N(R_b, z) = Q_b(z), TU_{rz}^N(R_b, z) = 0, \\ T^i(R, 0) = T^i(R, l) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N), \\ T^1(R_a, z) = T_a(z), T^N(R_b, z) = T_b(z). \end{aligned} \quad (11)$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned} S_r^{i-1}(R_i, z) = S_r^i(R_i, z), TU_{rz}^{i-1}(R_i, z) = TU_{rz}^i(R_i, z) \\ U_r^{i-1}(R_i, z) = U_r^i(R_i, z), U_z^{i-1}(R_i, z) - U_z^i(R_i, z) = K \cdot TU_{rz}^i(R_i, z) \\ T^{i-1}(R_i, z) = T^i(R_i, z), \Lambda^{i-1} \frac{\partial T^{i-1}(R_i, z)}{\partial R} = \Lambda^i \frac{\partial T^i(R_i, z)}{\partial R} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (12)$$

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Решение краевой задачи (10) – (12) в направлении продольной оси цилиндра ищется в виде тригонометрических рядов

$$\begin{aligned} U_r^i(R, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n^i(R) \sin(\beta Z), \\ U_z^i(R, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^i(R) \cos(\beta Z), \end{aligned}$$

$$T_r^i(R, Z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^i(R) \sin(\beta Z). \quad (13)$$

где $\beta = \frac{n\pi\chi_b}{L}$. Принятые решения (13) удовлетворяют условиям свободного опирания на торцах цилиндра.

Подставляя (13) в систему уравнений (10), несложно получить ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \left[A_{11}^i \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) - \frac{A_{22}^i}{R^2} + A_{55}^i \beta^2 \right] \Phi_n^i(R) + \\ & \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \beta \frac{d}{dR} + (A_{13}^i - A_{23}^i) \frac{\beta}{R} \right] \Psi_n^i(R) = \Gamma_r^i \frac{dF_n^i(R)}{dR}, \\ & \left[(A_{13}^i + A_{55}^i) \beta \frac{d}{dR} + (A_{23}^i + A_{55}^i) \frac{\beta}{R} \right] \Phi_n^i(R) + \\ & \left[A_{55}^i \left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) + A_{33}^i \beta^2 \right] \Psi_n^i(R) = \Gamma_r^i F_n^i(R), \\ & \left[\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \right) - \beta^2 \right] F_n^i(R) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

По аналогичной схеме преобразовываются и граничные условия (11), (12):

– на торцах и лицевых поверхностях цилиндра

$$\begin{aligned} & A_{11}^1 \frac{d\Phi_n^1(R_a)}{dR} + A_{12}^1 \frac{\Phi_n^1(R_a)}{R} - \beta A_{13}^1 \Psi_n^1(R_a) = Q_{an}, \\ & \beta \Phi_n^1(R_a) + \frac{d\Psi_n^1(R_a)}{dR} = 0, \\ & A_{11}^N \frac{d\Phi_n^N(R_b)}{dR} + A_{12}^N \frac{\Phi_n^N(R_b)}{R} - \beta A_{13}^N \Psi_n^N(R_b) = Q_{bn}, \\ & \beta \Phi_n^N(R_b) + \frac{d\Psi_n^N(R_b)}{dR} = 0, \\ & F_n^1(R_a) = T_{an}, F_n^N(R_b) = T_{bn}. \end{aligned} \quad (15)$$

– по сопряженным поверхностям соседних слоев

$$\begin{aligned} & A_{11}^{i-1} \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^{i-1} \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - \beta A_{13}^{i-1} \Psi_n^{i-1}(R^i) = \\ & = A_{11}^i \frac{d\Phi_n^{i-1}(R^i)}{dR} + A_{12}^i \frac{\Phi_n^{i-1}(R^i)}{R} - \beta A_{13}^i \Psi_n^i(R^i), \\ & \beta \Phi_n^{i-1}(R^i) + \frac{d\Psi_n^{i-1}(R^i)}{dR} = \beta \Phi_n^i(R^i) + \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR}, \\ & \Phi_n^{i-1}(R^i) = \Phi_n^i(R^i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_n^{i-1}(R^i) - \Psi_n^i(R^i) &= K \left(\beta \Phi_n^i(R^i) + \frac{d\Psi_n^i(R^i)}{dR} \right), \\ F_n^{i-1}(R^i) &= F_n^{i-1}(R^i), \\ \Lambda^{i-1} \frac{dF_n^{i-1}(R^i)}{dR} &= \Lambda^i \frac{dF_n^i(R^i)}{dR}.\end{aligned}\tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned}Q_{an} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} Q_a(Z) \sin(\beta Z) dZ, \quad Q_{bn} = \frac{1}{L} \int_0^{2L} Q_b(Z) \sin(\beta Z) dZ, \\ T_{an} &= \frac{1}{L} \int_0^{2L} T_a(Z) \sin(\beta Z) dZ, \quad T_{bn} = \frac{1}{L} \int_0^{2L} T_b(Z) \sin(\beta Z) dZ\end{aligned}$$

Считается, что в радиальном направлении функции $\Phi_n^i(R^i)$, $\Psi_n^i(R^i)$, $F_n^i(R^i)$ непрерывны по толщине i -го слоя, тогда при помощи рядов Тейлора их можно будет записать в виде:

$$\begin{aligned}\Phi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} C_k^i (R-1)^k, \\ \Psi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k^i (R-1)^k, \\ F_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} D_k^i (R-1)^k,\end{aligned}\tag{17}$$

Подставив (17) в уравнения (15) и приравняв коэффициенты при $(R-1)^k$ к нулю, несложно получить следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned}C_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[\begin{aligned} &-(k+1)C_{k+1}^i + \frac{A_{22}^i + \beta^2 A_{55}^i}{A_{11}^i} C_k^i - \\ &(k+1)\beta \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{A_{11}^i} B_{k+1}^i - \beta \frac{A_{13}^i - A_{23}^i}{A_{11}^i} B_k^i + \frac{\Gamma_r^i(k+1)}{A_{11}^i} D_{k+1}^i \end{aligned} \right] \\ B_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[\begin{aligned} &-(k+1)B_{k+1}^i + \frac{\beta^2 A_{33}^i}{A_{55}^i} B_k^i - \\ &(k+1)\beta \frac{A_{13}^i + A_{55}^i}{A_{55}^i} C_{k+1}^i - \beta \frac{A_{55}^i + A_{23}^i}{A_{55}^i} C_k^i + \frac{\Gamma_z^i}{A_{55}^i} D_k^i \end{aligned} \right] \\ D_{k+2}^i &= \frac{1}{(k+2)(k+1)} \left[-(k+1)D_{k+1}^i + \beta^2 \frac{i}{k} \right].\end{aligned}\tag{18}$$

Из рекуррентных соотношений (18) следует, что все коэффициенты C_k^i , B_k^i и D_k^i могут быть выражены через C_0^i , C_1^i , B_0^i , B_1^i , D_0^i , D_1^i , когда $k > 1$. Тогда решения системы уравнений (15) могут быть записаны в компактной форме

$$\begin{aligned}
\Phi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[g_c^i(k,1)C_0^i + g_c^i(k,2)C_1^i + g_c^i(k,3)B_0^i \right. \\
&\quad \left. + g_c^i(k,4)B_1^i + g_c^i(k,5)D_0^i + g_c^i(k,6)D_1^i \right] (R-1)^k, \\
\Psi_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[g_b^i(k,1)C_0^i + g_b^i(k,2)C_1^i + g_b^i(k,3)B_0^i \right. \\
&\quad \left. + g_b^i(k,4)B_1^i + g_b^i(k,5)D_0^i + g_b^i(k,6)D_1^i \right] (R-1)^k, \\
F_n^i(R) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[g_d^i(k,1)C_0^i + g_d^i(k,2)C_1^i + g_d^i(k,3)B_0^i \right. \\
&\quad \left. + g_d^i(k,4)B_1^i + g_d^i(k,5)D_0^i + g_d^i(k,6)D_1^i \right] (R-1)^k,
\end{aligned} \tag{19}$$

где $g_b^i(k, o), g_c^i(k, j), g_d^i(k, j)$ константы, определяемые при помощи рекуррентных соотношений (19). Неизвестные константы $C_0^i, C_1^i, B_0^i, B_1^i, D_0^i, D_1^i$, число которых определяется количеством дискретных слов цилиндра N , находятся путем подстановки выражений (19) в граничные условия (15), (16). Полученная при этом линейная алгебраическая система уравнений включает $6N$ неизвестных констант.

Определив значение выражений (19) и подставив их в заданные решения (13), несложно при помощи геометрических и физических соотношений, представленных выше, получить решение рассматриваемой термоупругой краевой задачи.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Геометрические параметры многослойного кругового полого цилиндра $r_a = 0,148$ м, $r_b = 0,18$ м и $l = 1$ м. Эталонные значения температуры, модуль Юнга и коэффициент теплового расширения равны: $T_0 = 50$ К, $E_0 = 40$ ГПа, а $\alpha_0 = 7,0 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹. Температурные нагрузки на внутренней и наружной поверхности, а также внутреннее и внешнее давление, заданы в следующем виде:

$$\begin{aligned}
T_a(z) &= 0, T_b(z) = \Delta T \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\
q_a(z) &= q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), q_b(z) = 0.
\end{aligned}$$

где $q_0 = 50$ МПа, $T = 50$ К; 80 К.

Цилиндр состоит из 4 слоев: 1) твердый полиэтилен высокого давления ($h=4$ мм) $E = 260$ МПа, $\nu = 0,4$, $\alpha = 0,44$ Вт/м·К, $\beta = 20 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹; 2) стеклопластик ($h = 20$ мм) $E = 71$ ГПа, $\nu = 0,31$, $\alpha = 160$ Вт/м·К, $\beta = 2,3 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹; 3) пеновинилпласт ($h=4$ мм) $E=83$ МПа, $\nu=0,33$, $\alpha=0,4$ Вт/м·К, $\beta=15 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹; 4) дюралюминий ($h=4$ мм) $E=71$ ГПа, $\nu=0,31$, $\alpha=160$ Вт/м·К, $\beta=2,3 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹.

Для первого, третьего и четвертого слоев, изготовленных из упругого изотропного материала, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
E_z = E_\theta = E_r = E, G_{\theta z} = G_{r\theta} = G_{rz} = G, \\
\nu_{z\theta} = \nu_{zr} = \nu_{\theta r} = \nu_{\theta z} = \nu_{rz} = \nu_{r\theta} = \nu, G = \frac{E}{2(1+\nu)}.
\end{aligned}$$

Упругие характеристики стеклопластика определялись по методике, предложенной в работе [1]. Модули упругости E , сдвига G и коэффициент Пуассона ν наматываемых лент, набранных из алюмоборосиликатных нитей, соответственно равны $E_B = 55000$, $G_B =$, $\nu_B =$. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер со следующими параметрами упругости: $E_M = 3550$, $G_M =$, $\nu_M =$. В

каждом монослое толщиной 0,25 мм объем, занимаемый лентами, составляет 70% общего объема.

Технические постоянные рассматриваемого многослойного стеклопластика сведены в табл. 1.

Таблица 1 - Упругие характеристики стеклопластиков

Схема армирования	E , МПа	G , МПа	ν_{ij}	ν_{ji}
[$0_4^\circ / -75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 75^\circ / 0_2^\circ / -75^\circ / 0_4^\circ$]	$E_z = 23800$	$G_{\theta z} = 7490$	$\nu_{z\theta} = 0,077$	$\nu_{\theta z} = 0,11$
	$E_\theta = 33500$	$G_{rz} = 5014$	$\nu_{zr} = 0,397$	$\nu_{rz} = 0,4$
	$E_r = 23870$	$G_{r\theta} = 6620$	$\nu_{\theta r} = 0,405$	$\nu_{r\theta} = 0,284$

На рисунках 2 – 12 показаны графики распределения перемещений и напряжений в толстостенном цилиндре.

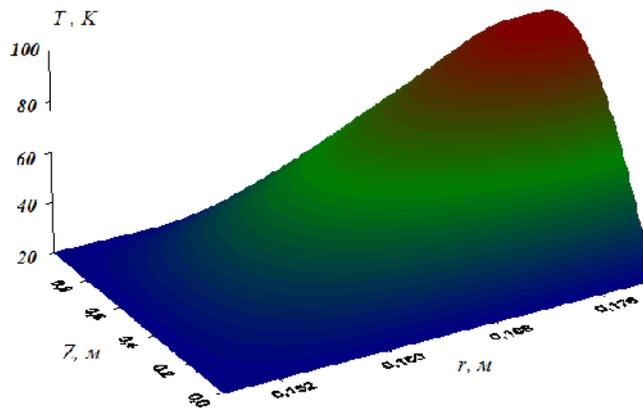


Рисунок 2 – Распределение температуры в цилиндре ($T=80$ К)

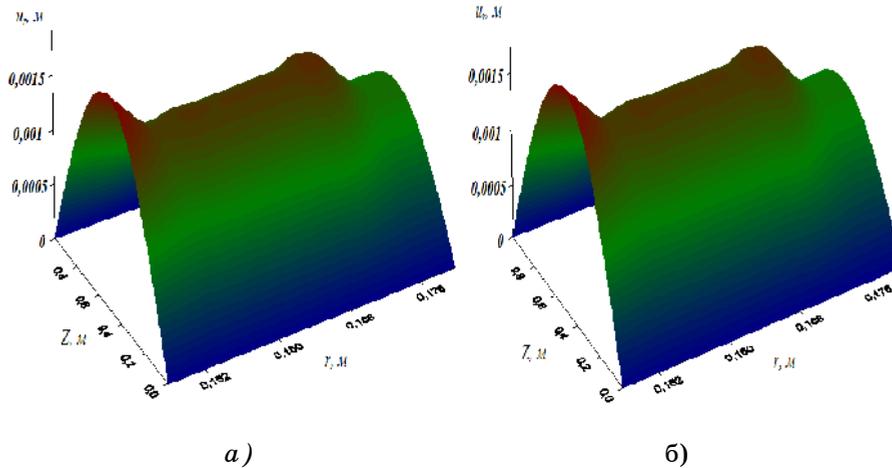


Рисунок 3 – Распределение радиальных перемещений в цилиндре ($q_0=50$ МПа):
а) $T=80$ К; б) $T=50$ К

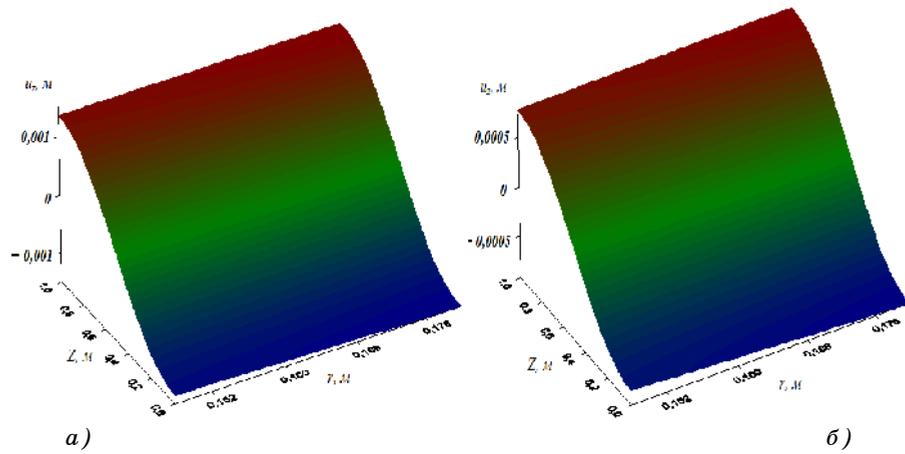


Рисунок 4 – Распределение продольных перемещений в цилиндре ($q_0=50\text{МПа}$):
 а) $T=80\text{К}$; б) $T=50\text{К}$

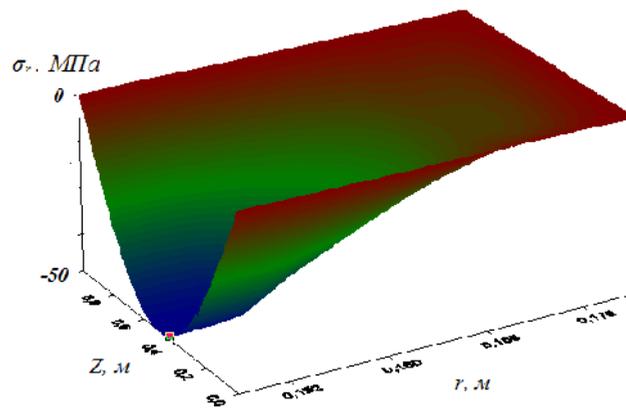


Рисунок 5 – Распределение радиальных напряжений в цилиндре
 ($q_0=50\text{МПа}$, $T=80\text{К}$)

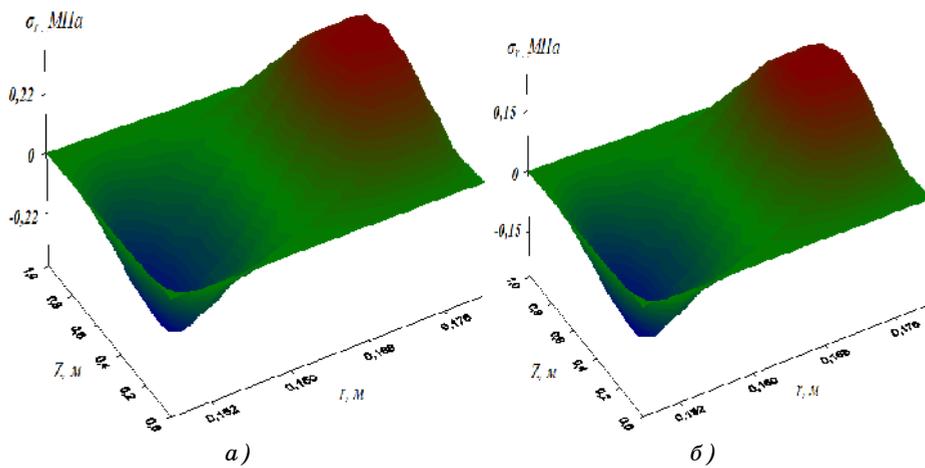


Рисунок 6 – Распределение радиальных напряжений в цилиндре ($q_0=0\text{МПа}$):
 а) $T=80\text{К}$; б) $T=50\text{К}$

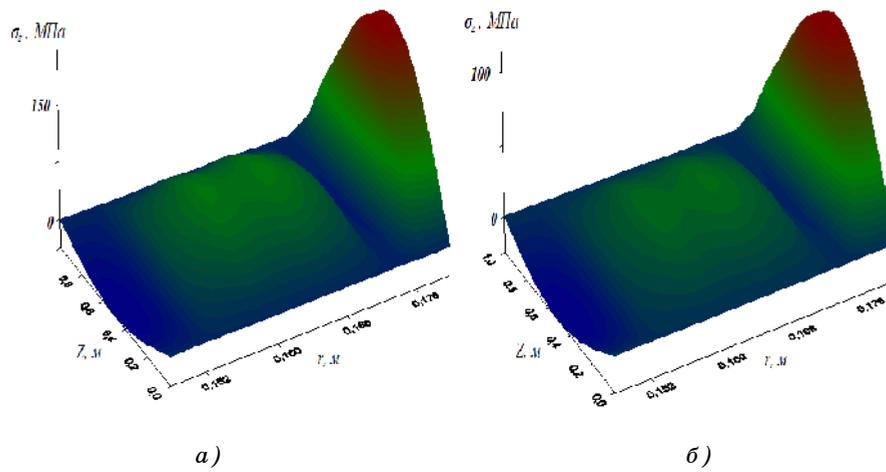


Рисунок 7 – Распределение осевых напряжений в цилиндре ($q_0=50\text{МПа}$):
 а) $T=80\text{К}$; б) $T=50\text{К}$

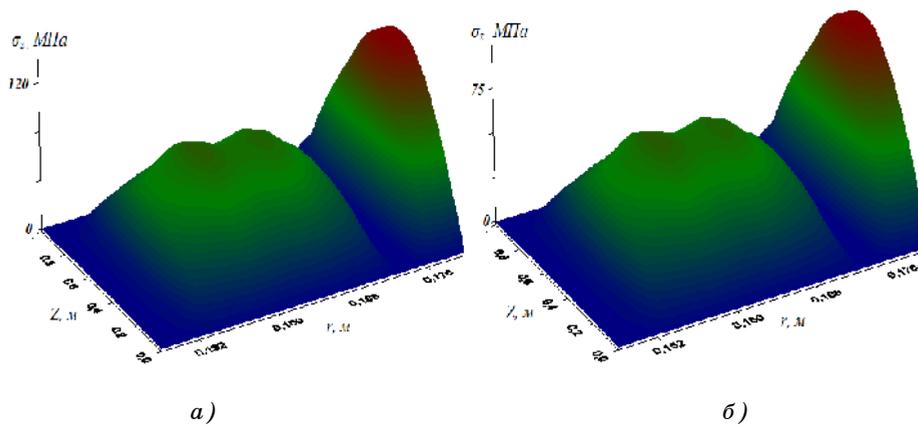


Рисунок 8 – Распределение осевых напряжений в цилиндре ($q_0=0\text{МПа}$):
 а) $T=80\text{К}$; б) $T=50\text{К}$

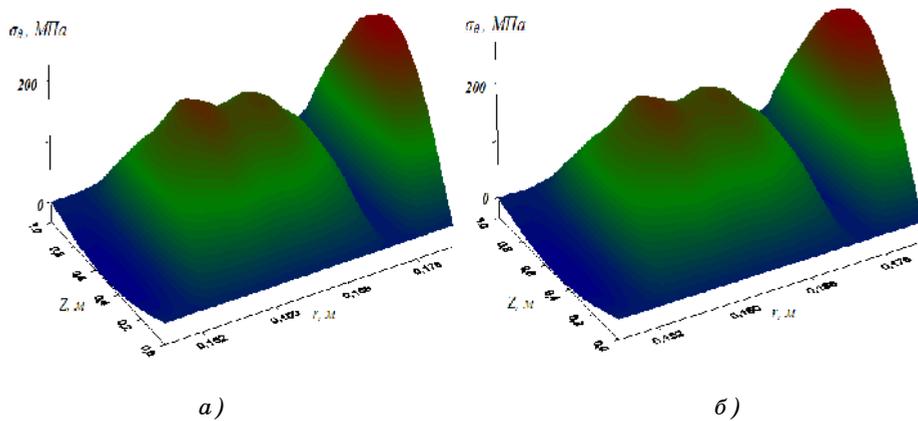
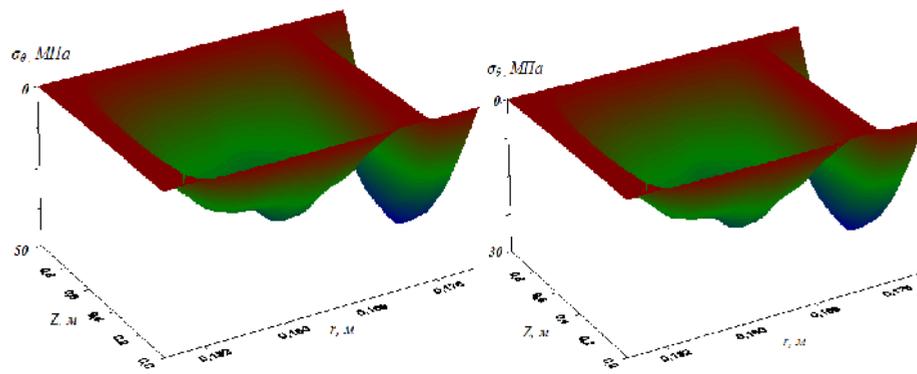
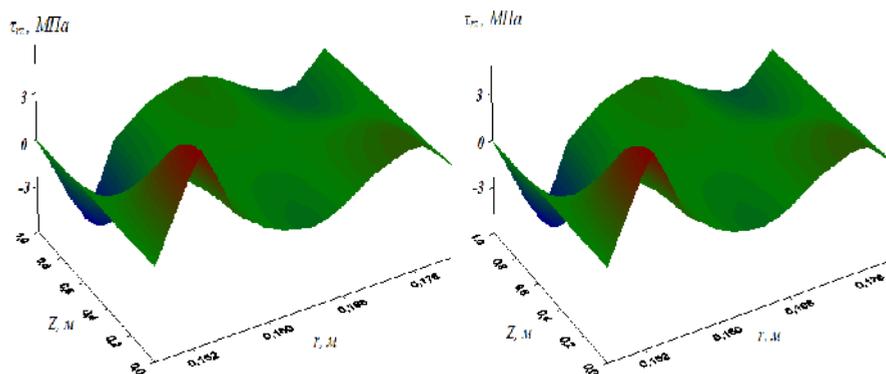


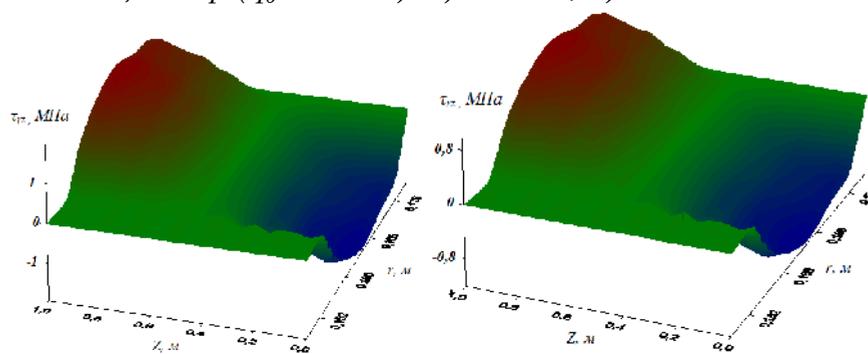
Рисунок 9 – Распределение окружных напряжений в цилиндре ($q_0=50\text{МПа}$):
 а) $T=80\text{К}$; б) $T=50\text{К}$



а) б)
 Рисунок 10 – Распределение окружных напряжений в цилиндре ($q_0=0$ МПа): а) $T=80$ К; б) $T=50$ К



а) б)
 Рисунок 11 – Распределение напряжений поперечного сдвига в цилиндре ($q_0=50$ МПа): а) $T=80$ К; б) $T=50$ К



а) б)
 Рисунок 12 – Распределение напряжений поперечного сдвига в цилиндре ($q_0=0$ МПа): а) $T=80$ К; б) $T=50$ К

Анализ теоретических результатов, показанных на рисунках 2-12, позволяет отметить следующее. Максимальные нормальные напряжения в продольном направлении (рисунок 8) во внешнем слое из дюралюминия возрастают на 59% при увеличении температуры всего 30К, и на 57% в несущем слое из стеклопластика. При анализе изменения нормальных напряжений в окружном направлении цилиндра (рисунок 9) при увеличении температуры на 30°К отмечается уменьшение указанных напряжений на 6% во внешнем слое и на 2% в несущем слое. Таким образом, следует отметить, что температурная нагрузка оказывают незначительное влияние на величину максимальных значений окружных напряжений. Из рисунков 11 – 12 видно, что напряжения поперечного сдвига мало зависят от величины температурной нагрузки, но, как известно, даже небольшие напряжения поперечного сдвига при наличии сжимающих или растягивающих трансверсальных напряжений (рис. 5) могут привести к расслоению рассматриваемой многослойной оболочки.

4. ВЫВОДЫ

В данной работе на основе дискретно-структурной теории проведены исследования напряженно-деформированного состояния многослойных оболочек при действии как статической, так и тепловой нагрузки, когда учитываются реальные условия взаимодействия слоев и величина изменения контактных напряжений на межслойных границах. Предложенный алгоритм решения рассмотренного здесь класса задач позволяет получать расчетные данные для оценки влияния физико-механических характеристик отдельных слоев на термоупругое деформированное состояние неоднородных по толщине цилиндров.

THERMAL STRESS STATE OF MULTILAYER PIPES IN HOMOGENEOUS STRUCTURE OF THE THICKNESS CONSIDERING AN IDEAL CONTACT BETWEEN THE LAYERS

*S.M. Vereshchaka, A.V. Deineka, U.V. Moroz, A.V. Shulumei,
Sumy State University,
2, Rimsky-Korsakov Str., 40007, Sumy, Ukraine*

The stress-strain state of a multilayer hollow cylinder of finite length under the action of internal pressure and heat is investigated based on the classical theory of elasticity of an anisotropic body. Kinematic and static conditions of contact formatting surfaces of adjacent layers are considered ideal. Solution of the problem is obtained in axisymmetric. The set value of the internal pressure and temperature vary sinusoidally along the length of the cylinder. It is noted that the increase in temperature on the outer surface of the composite pipe has a significant impact on its stress state.

Keywords: *hollow cylinder, thermal stresses; fiberglass.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Верещака С. М. Нелинейное деформирование и устойчивость многослойных элементов конструкций с дефектами структуры / Верещака С.М. – Сумы: Изд-во СумГУ, 2009. – 286 с.
2. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В. Г. Пискунов, А. О. Рассказов // Прикладная механика. – 2002. – Т.38, № 2. – С. 22-56.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Shao Z. S. Mechanical and thermal stresses of a functionally graded circular hollow cylinder with finite length / Z. S. Shao // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2005. – Vol. 82. – P. 155 – 163.

Поступила в редакцию 14 октября 2013 г.